BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :
294
ESC_MATT

Concepteur Epreuves ESC : ESC SAINT-ETIENNE

OPTION : TECHNOLOGIQUE

MATHEMATIQUES

Mardi 24 Mai 2005, de 14 h. à 18 h.

N.B.
Il n'est fait usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Soient les matrices carrées $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

On note I la matrice unité d'ordre 3 .

1. (a) Montrer à l'aide du pivot de Gauss que P est inversible et calculer son inverse.

   (b) Vérifier la relation $P^{-1}AP = D$.

   (c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul , $A^n = PD^nP^{-1}$.

   (d) Vérifier $P^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$ et en déduire que pour tout $n \geq 1$, $A^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^n \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6}(-\frac{1}{2})^n \end{bmatrix}$.

On considère désormais deux urnes :
Une urne bleue contenant initialement un jeton marqué 0 et un jeton marqué 1.
Une urne rouge contenant initialement un jeton marqué 0 et un jeton marqué 1.

On appelle " échange " l'action consistant à extraire simultanément un jeton de chaque urne puis à le remettre dans l'autre urne. On effectue des échanges successifs indéfiniment.
Pour tout entier naturel non nul n on désigne par Z_n la variable aléatoire réelle discrète égale à la somme des points marqués sur les jetons de l'urne bleue après le n - ième échange.
On note Z_0 la variable certaine égale à 1 , somme initiale des points dans l'urne bleue.

2. Donner l'ensemble des valeurs possibles de Z_1 et déterminer la loi de Z_1.

3. (a) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer les probabilités conditionnelles :
   $P_{Z_n=0}(Z_{n+1} = 0)$, $P_{Z_n=1}(Z_{n+1} = 0)$, $P_{Z_n=2}(Z_{n+1} = 0)$.

On note dans la suite et pour tout entier naturel n , $p_n = P(Z_n = 0)$, $q_n = P(Z_n = 1)$, $r_n = P(Z_n = 2)$
(Ce qui entraîne $p_0 = 0, q_0 = 1, r_0 = 0$).

   (b) Grâce à la question (a) et à une formule de probabilités totales, exprimer p_{n+1} en fonction de q_n.

   (c) Donner les relations similaires fournissant q_{n+1} en fonction de p_n, q_n, r_n et r_{n+1} en fonction de q_n.

4. On note pour tout entier naturel n : $U_n = \begin{bmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{bmatrix}$

   (a) Vérifier que pour tout entier naturel n non nul , $U_{n+1} = AU_n$.
   Cette relation est-elle valable pour $n = 0$?

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul , $U_n = A^nU_0$.

   (c) En déduire pour $n \geq 1$, p_n, q_n, r_n en fonction de n ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n$.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Z_n ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{e^t + 2 + e^{-t}}$.

1. (a) Montrer que f est positive et continue sur $\mathbb{R}$. Vérifier que f est paire.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

   (c) Pour tout réel t, calculer $f'(t)$ et étudier son signe.
   En déduire le tableau des variations de f.

   (d) Tracer l'allure de la courbe représentative (C) de f.

2. (a) Vérifier que pour tout réel t, $f(t) = \dfrac{e^t}{(e^t + 1)^2}$.

   (b) On pose pour tous réels a et b tels que $a \leq b$ l'intégrale $J(a,b) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

   Montrer que $J(a,b) = \dfrac{1}{1+e^a} - \dfrac{1}{1+e^b}$.

   (c) En déduire la nature et la valeur des intégrales impropres suivantes :

   $$I = \int_0^{+\infty} f(t)dt \ , \ J = \int_{-\infty}^0 f(t)dt \ , \ K = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \ .$$

3. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : Pour tout réel x, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)dt$.

   (a) A l'aide de la question 2 . (b) , montrer que $F(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

   (b) On considère une variable aléatoire à densité X dont la fonction de répartition est F.

   Déterminer $P(X \leq \ln 2)$, $P(-\ln 2 < X \leq \ln 2)$.

   Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(X > \ln 2)}(X \leq \ln 3)$.

   (c) Montrer que pour tout réel x, $F(-x) = 1 - F(x)$.

   En déduire l' unique réel positif α tel que $P(-\alpha < X \leq \alpha) = \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 3

Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire réelle discrète dont l'univers image $X(\Omega)$ est inclus dans l'ensemble $\{ 0 , 1 , \dots , n \}$.

$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k)$ est l'espérance mathématique de X.

L'objectif de cet exercice est de prouver et d'utiliser l'égalité $E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geq k)$, notée **(R)** .

1. Etude d'un exemple. Soit X qui suit une loi binomiale de paramètres 2 et $\frac{3}{4}$.

   (a) Calculer $P(X \geq 1) + P(X \geq 2)$.

   (b) Donner la valeur de l'espérance $E(X)$. Vérifier l'égalité **(R)** .

2. On revient au cas général : X est telle que $X(\Omega)$ est inclus dans l'ensemble $\{ 0 , 1 , \dots , n \}$.

   (a) Justifier pour $k \in \{1, \dots , n\}$ l'égalité :

   $$P(X \geq k) = P(X = k) + P(X = k + 1) + \dots + P(X = n).$$

   (b) En écrivant puis en sommant les égalités précédentes de $k = 1$ à n , en déduire l'égalité **(R)**.

3. Application sur un exemple :

   Un jeu vidéo est constitué de n niveaux successifs.

   Lorsque le joueur commence un niveau , ce qui suppose qu'il ait réussi tous les niveaux précédents ,

   la probabilité qu'il le réussisse est $\frac{2}{3}$. Le jeu s'arrête dès que le joueur échoue à un niveau.

   On note X la variable aléatoire égale au nombre de niveaux réussis par le joueur.

   (a) Donner $X(\Omega)$.

   (b) On note N_j l'événement " Le joueur a réussi le niveau j ".
   Exprimer pour tout entier naturel k de $\{ 1 , \dots , n \}$ l'événement $(X \geq k)$ à l'aide des événements $N_1 , N_2 , \dots , N_k$.
   En déduire $P(X \geq k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$.

   (c) En utilisant la formule **(R)** , calculer l'espérance $E(X)$.